Institut für Theoretische Physik
Karlsruher Institut für Technologie

Moderne Theoretische Physik I: Theorie D

Dozent: Prof. Dr. Frans R. Klinkhamer
Assistent: Dr. Viacheslav A. Emelyanov

- Besprechung am Mittwoch, den 18.04.2018
- Aktuelle Informationen zur Vorlesung befinden sich unter folgendem Link: https://www.itp.kit.edu/~slava/quantenmechanik_ss_18.html
- Melden Sie sich rechtzeitig für Vorleistung und Klausur durch das QISPOS-System an. Dies ist erforderlich und erfolgt unter https://campus.studium.kit.edu

Name: ______________________ Übungsgruppe: ______ Punkte: ___X___

Übungsblatt 0

Aufgabe 0.1: Diracsche δ-Funktion

Die Delta-Funktion wurde von P.A.M. Dirac eingeführt und spielt eine besondere Rolle in der theoretischen Physik. Streng genommen ist sie nicht eine echte Funktion im üblichen Sinn, sondern eine *Distribution.* Die δ-Funktion wird folgendermaßen definiert:

$$\delta(x) \;=\; \begin{cases} 0\,, & \text{für } x \neq 0\,, \\ \infty\,, & \text{für } x = 0\,, \end{cases} \tag{1}$$

sodass das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x) \;=\; 1 \tag{2}$$

ist. Diese Definition benutzend, beweisen Sie die folgenden Aussagen bezüglich der Eigenschaften der δ-Funktion:

(a) Für eine beliebige stetige Funktion $f(x)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} dx\, f(x)\delta(x-a) \;=\; f(a)\,. \tag{3}$$

Bemerkung: Die Integration erstreckt sich über den ganzen Bereich der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Die Integrationsgrenzen brauchen aber nicht $\pm\infty$ zu sein. Das Integrationsgebiet is beliebig, muss aber den Punkt enthalten, in dem die δ-Funktion nicht verschwindet.

Stand 04. 04. 2018 um 10:34:25

(b) Die δ-Funktion ist eine gerade Funktion, d.h. $\delta(x) = \delta(-x)$, und

$$\delta(ax) \;=\; \frac{1}{|a|}\,\delta(x)\,, \quad \text{für } a \in \mathbb{R}/\{0\}\,. \tag{4}$$

(c) Es sei angenommen, daß die Funktion $g(x)$, die eindeutig im Bereich der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist, eine Reihe von Nullstellen $\{a_1, a_2, ...\}$ besitzt. Es gilt

$$\delta(g(x)) \;=\; \sum_{i=1,2,\ldots} \frac{1}{|g'(a_i)|}\,\delta(x - a_i)\,, \tag{5}$$

worin $g'(x)$ die Ableitung der Funktion $g(x)$ nach x bedeutet.

(d) Die δ-Funktion $\delta(x)$ kann als Grenzwert einer Funktion angesehen werden, die außerhalb eines kleinen Intervalls um den Punkt $x = 0$ gleich Null ist, dort aber an der Stelle $x = 0$ divergiert, sodass der Gleichung (2) trotzdem genügt ist. Die folgenden Gleichungen gelten

$$\delta(x) \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}\,, \tag{6a}$$

$$\delta(x) \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2/\varepsilon}\,. \tag{6b}$$

(e) Die δ-Funktion $\delta(x)$ kann auch als das Integral dargestellt werden. Eine der (wichtigsten) Integral-Darstellungen der δ-Funktion lautet

$$\delta(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dk\, e^{ikx}\,. \tag{7}$$

Hinweis: Um diese Beziehung zwischen der Delta-Funktion und der ebenen Welle zu beweisen, suchen Sie zuerst nach einer Funktion $g(x,k)$ mit zwei Variablen x und k, deren Grenzwert nach der Integration über die Variable k die δ-Funktion ergibt. Berechnen Sie danach den Grenzwert dieser Funktion, ohne sie über die Variable k zu integrieren.

Aufgabe 0.2: Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung is eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung, die die Konsequenz irgendeines Erhaltungssatzes darstellt. In der Hydrodynamik lautet diese wie folgt

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) \;=\; 0\,, \tag{8}$$

worin ρ und $\vec{v}$ die Dichte bzw. die Geschwindigkeit eines Volumenelementes der Flüssigkeit beschreiben.

(a) Welchen Erhaltungssatz beschreibt die Kontinuitätsgleichung in der Hydrodynamik?

(b) Leiten Sie die Integralform der Kontinuitätsgleichung her.

(c) Geben Sie andere Beispiele einer analogen Gleichung in der Physik.

(d) Beschreiben Sie eine physikalische Situation, in der die Kontinuitätsgleichung nicht gültig sein kann.