Institut für Theoretische Physik
Karlsruher Institut für Technologie

Moderne Theoretische Physik I: Theorie D

Dozent: Prof. Dr. Frans R. Klinkhamer
Assistent: Dr. Viacheslav A. Emelyanov

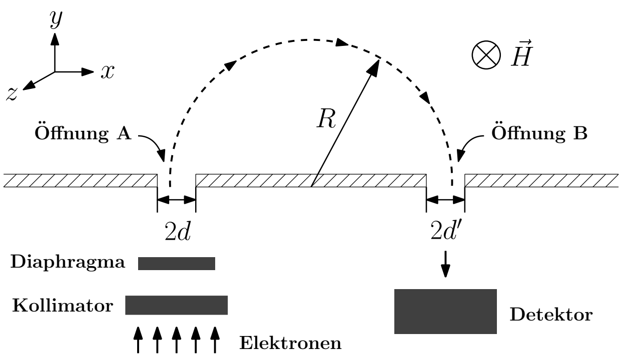
- `Abgabe am Montag, den 25.06.2018; Besprechung am Mittwoch, den 27.06.2018`
- `Aktuelle Informationen zur Vorlesung befinden sich unter folgendem Link: https://www.itp.kit.edu/~slava/quantenmechanik_ss_18.html`
- `Melden Sie sich rechtzeitig für Vorleistung und Klausur im QISPOS bzw. CAMPUS an. Dies ist erforderlich und erfolgt unter https://campus.studium.kit.edu`

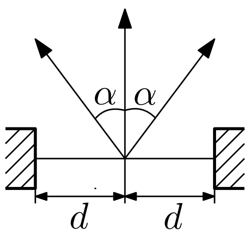
Name: ______________________ Übungsgruppe: ______ Punkte: ________

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1: Impulsmessung und Unschärferelation (8 Punkte)

Betrachten wir die folgende Methode der Impulsmessung (siehe Skizze links): Durch die Ablenkung eines geladenen Teilchens in konstantem Magnetfeld wird der Impuls dieses Teilchens gemessen.





(a) Drücken Sie den Krümmungsradius R eines Elektrons durch seinen Impuls im Magnetfeld $\mathbf{H} = (0, 0, -H)$ mit $H > 0$ aus, indem Sie annehmen, dass $p_x = p_z = 0$ am Zeitpunkt $t = 0$ gilt. **(1 Punkt)**

(b) Bestimmen Sie die klassische Impulsunschärfe Δp_y wegen nicht-verschwindender Größe der Öffnungen A und B, wenn das Elektron die Öffnung B erreicht. **(3 Punkte)**

(c) Bestimmen Sie die Ortsunschärfe Δy des Elektrons, wenn es die Öffnung B erreicht. **(3 Punkte)**

Hinweis: An der Stelle A wird es eine Impulsunschärfe in x-Richtung wegen Diffraktion geben, so dass $\alpha \sim \lambda/d$ gilt (siehe Skizze rechts). Verwenden Sie die De-Broglie-Wellenlänge des Elektrons, um die Unschärfe Δp_x quantitativ abzuschätzen.

(d) Überzeugen Sie sich davon, dass die Heisenbergsche Unschärferelation in y-Richtung gilt. **(1 Punkt)**

Aufgabe 10.2: Die Kugelflächenfunktionen (8 Punkte)

Die assoziierten Legendrepolynome sind definiert als

$$P_l^m(x) \;\equiv\; \frac{(-1)^m}{2^l l!}\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}\left(x^2-1\right)^l, \tag{1}$$

mit $x \in [-1,+1]$, $l \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}$, $|m| \leq l$ und erfüllen die folgende Differentialgleichung

$$(1-x)^2\frac{d^2}{dx^2}P_l^m(x) - 2x\frac{d}{dx}P_l^m(x) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P_l^m(x) \;=\; 0\,. \tag{2}$$

Die Kugelflächenfunktionen sind gegeben durch

$$Y_l^m(\theta,\phi) \;\equiv\; \left(\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right)^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\phi}\,. \tag{3}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Kugelflächenfunktionen als Funktionen auf der Kugel stetig sind. **(1 Punkt)**

(b) Der Drehimpulsoperator lautet in Kugelkoordinaten $[\mathbf{x} = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)]$

$$\widehat{l}_x \;=\; i\hbar\left(+\sin\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\tan\theta}\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \tag{4a}$$

$$\widehat{l}_y \;=\; i\hbar\left(-\cos\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\phi}{\tan\theta}\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \tag{4b}$$

$$\widehat{l}_z \;=\; -i\hbar\,\frac{\partial}{\partial\phi}\,. \tag{4c}$$

Berechnen Sie $\widehat{\mathbf{l}}^2$ in der Koordinatendarstellung und zeigen Sie danach, dass gilt

$$\Delta \;=\; \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\hat{\mathbf{l}}^2}{\hbar^2 r^2}\,, \tag{5}$$

wobei Δ der Laplace-Operator ist. **(3 Punkte)**

(c) Zeigen Sie, dass die Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta,\phi)$ gemeinsame Eigenfunktionen zu den Operatoren $\widehat{l}_z$ und $\widehat{\mathbf{l}}^2$ sind. Bestimmen Sie ihre Eigenwerte. **(4 Punkte)**

Aufgabe 10.3: Das Zentralpotential (8 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem Zentralpotential, d.h. der Hamilton-Operator ist

$$\widehat{H} \;=\; \frac{\widehat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(r)\,. \tag{6}$$

Betrachten wir ein Potential der folgenden Form:

$$V(r) \;=\; \begin{cases} 0\,, & \text{falls } r < R\,, \\ \infty\,, & \text{sonst}\,. \end{cases} \tag{7}$$

(a) Lösen Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung für den Drehimpuls $l = 0$ und finden Sie die Grundzustandsenergie, indem Sie annehmen, dass $\psi(\mathbf{x}) = (y_l(r)/r)Y_l^m(\theta, \phi)$ ist. **(3 Punkte)**

(b) Für $l \neq 0$ ist die Lösung gegeben durch $\psi(\mathbf{x}) \propto j_l(kr)Y_l^m(\theta, \phi)$, wobei $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$. Die Funktionen $j_n(x)$ sind als sphärische Besselfunktionen erster Art genannt. Bestimmen Sie die Energiewerte der Zustände mit $l = 1$ und $l = 2$. Berechnen Sie auch den Entartungsgrad dieser Zustände. **(5 Punkte)**