Institut für Theoretische Physik
Karlsruher Institut für Technologie

Moderne Theoretische Physik I: Theorie D

Dozent: Prof. Dr. Frans R. Klinkhamer
Assistent: Dr. Viacheslav A. Emelyanov

- `Abgabe am Montag, den 02.07.2018; Besprechung am Mittwoch, den 04.07.2018`
- `Aktuelle Informationen zur Vorlesung befinden sich unter folgendem Link: https://www.itp.kit.edu/~slava/quantenmechanik_ss_18.html`
- `Melden Sie sich rechtzeitig für Vorleistung und Klausur im QISPOS bzw. CAMPUS an. Dies ist erforderlich und erfolgt unter https://campus.studium.kit.edu`

Name: __________ Übungsgruppe: _____ Punkte: _____

Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1: Die Matrixdarstellung von Operatoren (8 Punkte)

(a) In einem dreidimensionalen Hilbert-Raum seien zwei lineare Operatoren durch ihre Wirkung auf die Vektoren einer orthonormierten Basis $\{|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, |\alpha_3\rangle\}$ definiert:

$$\begin{aligned}
\hat{A}|\alpha_1\rangle &= 3|\alpha_1\rangle - i\sqrt{2}|\alpha_2\rangle + |\alpha_3\rangle\,, \\
\hat{A}|\alpha_2\rangle &= i\sqrt{2}|\alpha_1\rangle + 2|\alpha_2\rangle - i\sqrt{2}|\alpha_3\rangle\,, \\
\hat{A}|\alpha_3\rangle &= |\alpha_1\rangle + i\sqrt{2}|\alpha_2\rangle + 3|\alpha_3\rangle\,,
\end{aligned} \tag{1}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\hat{B}|\alpha_1\rangle &= |\alpha_1\rangle + i\sqrt{2}|\alpha_2\rangle + |\alpha_3\rangle\,, \\
\hat{B}|\alpha_2\rangle &= -i\sqrt{2}|\alpha_1\rangle + i\sqrt{2}|\alpha_3\rangle\,, \\
\hat{B}|\alpha_3\rangle &= |\alpha_1\rangle - i\sqrt{2}|\alpha_2\rangle + |\alpha_3\rangle\,.
\end{aligned} \tag{2}$$

Beweisen Sie, dass die Operatoren $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ hermitesch sind und einen Satz von gemeinsamen Eigenvektoren besitzen. **(3 Punkte)**

(b) Betrachten wir ein Teilchen der Masse m in einem Quadratpotential, das durch die Frequenz ω beschrieben ist. Bestimmen Sie nicht-verschwindende Matrixelemente q_{nm} und p_{nm} von den Operatoren $\widehat{q}$ bzw. $\widehat{p}$ in der Basis $\{|n\rangle\}$, die in Aufgabe 7.1 eingeführt wurde. Bestimmen Sie auch die Dimension der Matrizen q_{nm} und p_{nm}. **(5 Punkte)**

Aufgabe 11.2: Satz von Ehrenfest (8 Punkte)

(a) Zeigen Sie im Rahmen der Schrödingerschen Wellenmechanik das Ehrenfestsche Theorem für ein Teilchen der Masse m in einer Dimension, das sich in einem Potential $V(q)$ bewegt:

$$\frac{d}{dt}\langle\widehat{q}\rangle = \frac{\langle\widehat{p}\rangle}{m} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\langle\widehat{p}\rangle = -\langle\widehat{V}'(q)\rangle\,. \qquad \textbf{(4 Punkte)} \tag{3}$$

(b) Zeigen Sie weiter, dass der Ortserwartungswert $\langle\widehat{q}\rangle$ die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle\widehat{q}\rangle = -\widehat{V}'(\langle q\rangle) \tag{4}$$

erfüllt, falls $\widehat{V}(q)$ ein Polynom höchstens zweiten Grades in q ist. **(3 Punkte)**

(c) Angenommen, $\widehat{V}(q)$ sei kein Polynom höchstens zweiten Grades in q. Wie geartet muss eine Wellenfunktion sein, damit die Newtonsche Bewegungsgleichung zumindest näherungsweise gilt? (Qualitative Antwort genügt.) **(1 Punkt)**

Aufgabe 11.3: Das Schrödinger-Bild und Heisenberg-Bild (8 Punkte)

(a) Für ein abgeschlossenes System ($\partial\widehat{H}/\partial t = 0$) sei $\widehat{A}_S$ eine Observable im Schrödinger-Bild, $\widehat{A}_H$ die entsprechende des Heisenberg-Bildes. Beide Bilder stimmen zur Zeit $t_0 = 0$ überein. Der Anfangszustand $|\psi(t_0)\rangle$ sei Eigenvektor von $\widehat{A}$. Zeigen Sie, dass $|\psi(t)\rangle$ für $t > 0$ Eigenvektor zu $\widehat{A}_H(-t)$ mit demselben Eigenwert ist. **(4 Punkte)**

(b) Ein kräftefreies Teilchen besitze die Masse m. Bestimmen Sie die zeitabhängigen Operatoren $\widehat{q}_H(t)$ und $\widehat{p}_H(t)$. Berechnen Sie auch die folgenden Kommutatoren: $[\widehat{q}_H(t), \widehat{q}_H(t')]$, $[\widehat{p}_H(t), \widehat{p}_H(t')]$ und $[\widehat{q}_H(t), \widehat{q}_H(t')]$. **(4 Punkte)**