Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Physik
Karlsruher Institut für Technologie

Moderne Theoretische Physik I: Theorie D

Dozent: Prof. Dr. Frans R. Klinkhamer
Assistent: Dr. Viacheslav A. Emelyanov

- Abgabe am Montag, den 16.07.2018; Besprechung am Mittwoch, den 18.07.2018
- Aktuelle Informationen zur Vorlesung befinden sich unter folgendem Link: https://www.itp.kit.edu/~slava/quantenmechanik_ss_18.html
- Melden Sie sich rechtzeitig für Vorleistung und Klausur im QISPOS bzw. CAMPUS an. Dies ist erforderlich und erfolgt unter https://campus.studium.kit.edu

Name: ______________________ Übungsgruppe: ______ Punkte: ________

Übungsblatt 13

Aufgabe 13.1: Darstellung der Drehimpulsalgebra (12 Punkte)

Die Drehimpulsalgebra besteht aus drei Elementen $\widehat{J}_x$, $\widehat{J}_y$ sowie $\widehat{J}_z$, die genügen den folgenden Vertauschungsrelationen:

$$[\widehat{J}_x,\, \widehat{J}_y] \;=\; i\hbar \widehat{J}_z\,, \tag{1a}$$

$$[\widehat{J}_y,\, \widehat{J}_z] \;=\; i\hbar \widehat{J}_x\,, \tag{1b}$$

$$[\widehat{J}_z,\, \widehat{J}_x] \;=\; i\hbar \widehat{J}_y\,. \tag{1c}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Operatoren $\widehat{J}_+$ und $\widehat{J}_-$, die sind definiert durch

$$\widehat{J}_+ \;\equiv\; \widehat{J}_x + i\widehat{J}_y \quad \text{und} \quad \widehat{J}_- \;\equiv\; \widehat{J}_x - i\widehat{J}_y\,, \tag{2}$$

die folgenden Vertauschungsrelationen erfüllen:

$$[\widehat{J}_z,\, \widehat{J}_\pm] \;=\; \pm\hbar \widehat{J}_\pm \quad \text{und} \quad [\widehat{J}_+,\, \widehat{J}_-] \;=\; 2\hbar \widehat{J}_z\,. \quad \textbf{(2 Punkte)} \tag{3}$$

(b) Beweisen Sie, dass

$$\widehat{J}_-\widehat{J}_+ \;=\; \widehat{\mathbf{J}}^2 - \widehat{J}_z^2 - \hbar\widehat{J}_z\,, \tag{4a}$$

$$\widehat{J}_+\widehat{J}_- \;=\; \widehat{\mathbf{J}}^2 - \widehat{J}_z^2 + \hbar\widehat{J}_z\,, \tag{4b}$$

wobei $\widehat{\mathbf{J}}^2 \equiv \widehat{J}_x^2 + \widehat{J}_y^2 + \widehat{J}_z^2$ ist. **(2 Punkte)**

Stand 09. 07. 2018 um 15:39:27

(c) In Aufgabe 9.2.b haben wir gezeigt, dass $\widehat{\mathbf{J}}^2$ zum Beispiel mit $\widehat{J}_z$ kommutiert. Das heißt, dass die Operatoren $\widehat{\mathbf{J}}^2$ und $\widehat{J}_z$ die gemeinsamen Eigenvektoren besitzen, die wir im Weiteren als $|j, m\rangle$ bezeichnen. Beweisen Sie, dass die Eigenwerte der Operatoren $\widehat{\mathbf{J}}^2$ und $\widehat{J}_z$ sind $\hbar^2 j(j+1)$ bzw. $\hbar m$, wobei $2j+1 \in \mathbb{N}$ und $m \in \{-j,\, -j+1,\, \ldots,\, j-1,\, j\}$. **(8 Punkte)**

Aufgabe 13.2: Spin des Elektrons (12 Punkte)

Im Falle der zweidimensionalen Darstellung der Drehimpulsalgebra, d.h. $2j+1=2$, bezeichnet man $\widehat{J}_{x,y,z}$ als $\hat{s}_{x,y,z}$.

(a) Die gemeinsamen Eigenvektoren der Operatoren $\hat{\mathbf{s}}^2$ und $\hat{s}_z$ für ein Elektron sind $|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$ und $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$. Welche Eigenwerte besitzen $\hat{s}_x$ und $\hat{s}_y$? Bestimmen Sie die Eigenvektoren zu $\hat{s}_x$ und $\hat{s}_y$ in der Basis der Eigenvektoren zu $\hat{\mathbf{s}}^2$ und $\hat{s}_z$. **(6 Punkte)**

(b) Ein Elektron im Magnetfeld $\mathbf{B} = (0,\, 0,\, B)$ besitze nur einen Spinfreiheitsgrad und werde somit durch $\widehat{H} = \mu_B\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$, wobei $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\, \sigma_y,\, \sigma_z)$ die Pauli-Matrizen sind und μ_B das Bohrsche Magneton ist, beschrieben. Berechnen Sie $\langle \hat{s}_x(t)\rangle$, $\langle \hat{s}_y(t)\rangle$ und $\langle \hat{s}_z(t)\rangle$. **(6 Punkte)**

Hinweis: Die Zeitentwicklungsoperator ist gegeben durch $\exp(-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}t)$. *Beweisen Sie die Algebra der Pauli-Matrizen benutzend, dass* $\exp(i\alpha\, \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \cos(\alpha)\, I + i\sin(\alpha)\, \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ *im Allgemeinen gilt, wobei* I *die* 2×2 *Einheitsmatrix ist.*