Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Physik
Karlsruher Institut für Technologie

Moderne Theoretische Physik I: Theorie D

Dozent: Prof. Dr. Frans R. Klinkhamer
Assistent: Dr. Viacheslav A. Emelyanov

- Abgabe am Montag, den 30.04.2018; Besprechung am Mittwoch, den 02.05.2018
- Aktuelle Informationen zur Vorlesung befinden sich unter folgendem Link: https://www.itp.kit.edu/~slava/quantenmechanik_ss_18.html
- Melden Sie sich rechtzeitig für Vorleistung und Klausur durch das QISPOS-System an. Dies ist erforderlich und erfolgt unter https://campus.studium.kit.edu

Name: ______________________ Übungsgruppe: ______ Punkte: ______

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1: Die Poisson-Klammer (12 Punkte)

In der Hamiltonschen Mechanik ist jeder Zustand eines mechanischen Systems, das aus n Teilchen im 1-dimensionalen Ortsraum besteht, durch einen Punkt im Phasenraum[1] vollständig festgelegt. Jede reellwertige, beschränkte und differenzierbare Funktion, die auf dem Phasenraum definiert ist, entspricht einer physikalischen Observable, die auch als Messgröße genannt ist. Die Funktionen über dem Phasenraum lassen sich punktweise addieren und multiplizieren, und es lässt sich zeigen, daß sie eine Algebra bilden. Diese wird zu Lie-Algebra, wenn man die folgende Abbildung einführt

$$\{f, g\} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right), \tag{1}$$

die als Poisson-Klammer bezeichnet ist.

(a) Zeigen Sie, daß die Poisson-Klammer die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$\text{Bilinearität:} \quad \{af + bg, h\} \;=\; a\{f, h\} + b\{g, h\}\,, \quad a, b \in \mathbb{R}\,, \quad \textbf{(1 Punkt)} \tag{2a}$$

$$\text{Antisymmetrie:} \quad \{f, g\} \;=\; -\{g, f\}\,, \quad \textbf{(1 Punkt)} \tag{2b}$$

$$\text{Leibnizregel:} \quad \{f, gh\} \;=\; \{f, g\}h + g\{f, h\}\,, \quad \textbf{(1 Punkt)} \tag{2c}$$

$$\text{Jacobi-Identität:} \quad \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} \;=\; 0\,. \quad \textbf{(1 Punkt)} \tag{2d}$$

[1] Es sei daran erinnert, daß der Phasenraum der $2n$-dimensionale Raum mit den Koordinaten q_i und p_i ist, worin der Index i von 1 bis n durchläuft.

Stand 07. 04. 2018 um 18:25:53

(b) Der Einfachheit halber bestehe ein mechanisches System im Folgenden aus einem Teilchen mit den Koordinaten q und p. Zeigen Sie, daß der Satz von Funktionen q, p und 1 eine Unteralgebra (die Heisenberg-Algebra $\mathfrak{h}(3)$) bildet. Mit anderen Worten, zeigen Sie, daß der Satz von dieser Funktionen unter der Poisson-Klammer abgeschlossen ist. **(2 Punkte)**

(c) Zeigen Sie, daß der Satz von Funktionen q^2, p^2 und qp über dem Phasenraum auch eine Unteralgebra (die symplektische Algebra $\mathfrak{sp}(2)$) bildet. **(2 Punkte)**

(d) Zeigen Sie, daß die Poisson-Klammer von jedem Element aus $\mathfrak{h}(3)$ und jedem Element aus $\mathfrak{sp}(2)$ ein Element der Algebra $\mathfrak{h}(3)$ ergibt. **(2 Punkte)**

(e) Zeigen Sie, daß der Satz von Monome[2] des Grades ≥ 3 keine Unteralgebra ist. **(2 Punkte)**

Aufgabe 2.2: Die Energie einer elektromagnetischen Welle (12 Punkte)

Das elektromagnetische Feld ist durch das Viererpotential A_μ beschrieben. Lassen wir den folgenden (Energie-Impuls-)Tensor

$$T^\mu_\nu \;=\; \frac{1}{4\pi}\left(-F^{\mu\lambda}F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4}\delta^\mu_\nu F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}\right), \tag{3}$$

einführen, worin $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ der Feldstärketensor des elektromagnetischen Feldes ist.[3] Die griechischen Indizes laufen von 0 bis 3 durch. Die Minkowski-Metrik ist $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$. Der Feldstärketensor ist mit dem elektrischen Feld E_i und dem magnetischen Feld B_i wie folgt verknüpft: $F_{0i} = E_i$ und $F_{ij} = -\varepsilon_{ijk}B_k$, worin die lateinischen Indizes von 1 bis 3 durchlaufen. ε_{ijk} ist das Levi-Civita-Symbol, d.h. $\varepsilon_{ijk} = +1/\varepsilon_{ijk} = -1$ gilt, falls (i,j,k) eine gerade/ungerade Permutation von $(1,2,3)$ ist, und ε_{ijk} verschwindet, wenn mindestens zwei Indizes gleich sind.

(a) Die 00-Komponente des Tensors T^μ_ν entspricht der Energiedichte des elektromagnetischen Feldes. Drücken Sie diese Komponente des Energie-Impuls-Tensors durch das elektrische und magnetische Felder aus. Drücken Sie danach die totale Energie H des Feldes durch seine Energiedichte aus. **(3 Punkte)**

(b) Der Viererpotential A_μ in einem Kasten (Volumen $V = L\times L\times L$) sei $A_0 = 0$ und $\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}}(\mathbf{a}_{\mathbf{k}}e^{+i\mathbf{kx}} + \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}}e^{-i\mathbf{kx}})$ in der Coulomb-Eichung, d.h. $\mathbf{kA} = 0$, worin $\mathbf{kx} = -k_i x^i$, $k_\mu = (|\mathbf{k}|, -\mathbf{k})$, und die Amplituden $\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \propto e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}$ mit $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$ aber von den Punkt des Raumes unabhängig sind. Der Wellenvektor $\mathbf{k}$ ist $(2\pi n_x/L, 2\pi n_y/L, 2\pi n_z/L)$, worin n_x, n_y und n_z ganze Zahlen sind. Zeigen Sie, daß dieser Viererpotential die Lösung der quellenfreien Maxwell-Gleichung ist. **(2 Punkte)**

[2] Ein Monom ist ein Polynom, das aus einem Glied besteht. Zum Beispiel ist qp ein Monom des 2. Grades.
[3] Summenkonvention: Über gleiche Indizes, von denen einer hoch und einer tief gestellt ist, wird summiert.

(c) Drücken Sie die Energie H der elektromagnetischen Welle durch die folgenden Variablen

$$\mathbf{Q_k} \;=\; \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}\big(\mathbf{a_k} + \mathbf{a_k^*}\big) \quad \text{und} \quad \mathbf{P_k} \;=\; -i\omega_{\mathbf{k}}\sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}\big(\mathbf{a_k} - \mathbf{a_k^*}\big) \tag{4}$$

aus. Interpretieren Sie Ihres Ergebnis. **(7 Punkte)**