Moderne Theoretische Physik I: Theorie D

Dozent: Prof. Dr. Frans R. Klinkhamer
Assistent: Dr. Viacheslav A. Emelyanov

- `Abgabe am Montag, den 07.05.2018; Besprechung am Mittwoch, den 09.05.2018`
- `Aktuelle Informationen zur Vorlesung befinden sich unter folgendem Link: https://www.itp.kit.edu/~slava/quantenmechanik_ss_18.html`
- `Melden Sie sich rechtzeitig für Vorleistung und Klausur im QISPOS bzw. CAMPUS an. Dies ist erforderlich und erfolgt unter https://campus.studium.kit.edu`

Name: ______________________ Übungsgruppe: ________ Punkte: ________

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1: Die 1-dimensionale Schrödinger-Gleichung: Potentialtopf (12 Punkte)

Die Schrödinger-Gleichung im 1-dimensionalen Ortsraum lautet wie folgt

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\,\psi(t,q) \;=\; \hat{H}\,\psi(t,q)\,, \tag{1}$$

worin $\hbar$ die reduzierte Plancksche Konstante und $\psi(t,q)$ die Wellenfunktion eines Teilchens sind. Der Hamiltonoperator $\hat{H}$ legt die Zeitentwicklung der Wellenfunktion fest und sei in der Koordinatendarstellung von der From

$$\hat{H} \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dq^2} + U(q)\,, \tag{2}$$

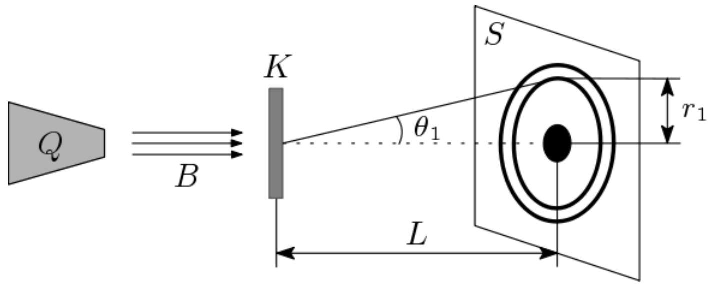
wobei $U(q)$ das Potential ist, in dem sich das Teilchen befindet. Das Potential sei

$$U(q) \;=\; \begin{cases} U_1\,, & \text{für} \;\; q \;>\; a\,, \\ U_2\,, & \text{für} \;\; b \;<\; q \;<\; a\,, \\ U_3\,, & \text{für} \;\; q \;<\; b\,, \end{cases} \tag{3}$$

wobei $U_2 < U_1 < U_3$. Die Energie des Teilchens beträgt E, sodass $U_2 < E < U_1$ gilt.

(a) Legen Sie die allgemeine Lösung der stationären Schrödinger-Gleichung in jedem Bereich des Raumes fest, indem Sie berücksichtigen, dass die Wellenfunktion des Teilchens für $|q| \to \infty$ verschwinden soll. **(6 Punkte)**

Stand 27. 04. 2018 um 17:32:34



Zur Aufgabe 3.2.b: Beugung des Elektronenbündels B am Kristall K. Die von der Quelle Q ausgehenden Elektronen werden am Kristall gebeugt. Auf dem Schirm S beobachtet man das Interferenzbild.

(b) Verwenden Sie die Differenzierbarkeit[1] der Wellenfunktion an den Stellen $q = a$ und $q = b$, um alle Konstanten der Integration zu bestimmen. **(3 Punkte)**

(c) Welche Werte kann die Energie des Teilchens annehmen? **(3 Punkte)**

Aufgabe 3.2: Die De-Broglie-Wellenlänge (6 Punkte)

(a) Schätzen Sie den Durchmesser des Wasserstoffatoms ab, indem Sie in Betracht ziehen, dass das Elektron im Atom wellenartige Eigenschaften besitzt. **(3 Punkte)**

(b) Es wurde experimentell beobachtet, dass Strahlenbündel aus Elektronen wie elektromagnetische Wellen an einem Hindernis ablenkt werden, was zu Interferenzerscheinungen führt. Stellen wir uns vor, daß die Elektronenbeugung am Platin-Kristall mit dem Gitterabstand $d = 3.92 \cdot 10^{-8}$ cm auftritt, sodass der Radius r_1 des ersten Interferenzringes 0.62 cm beträgt, wobei $L = 32$ cm der Entfernung zwischen der Elektronenquelle und dem Schirm entspricht. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v der Elektronen und vergleichen Sie diese mit der Lichtgeschwindigkeit c. **(3 Punkte)**

Hinweis: Die Bragg-Gleichung für elektromagnetische Wellen der Länge λ lautet wie folgt: $2d \sin\theta_n = n\lambda$, wobei d der Gitterabstand ist und θ_n mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ den Beugungswinkel entsprechen. Diese Gleichung beschreibt Richtungen, in welchen die Strahlung bei der Beugung reflektiert wird.

Aufgabe 3.3: Wahrscheinlichkeitserhaltung (6 Punkte)

Es sei daran erinnert, dass $|\psi(t,q)|^2 dq$ die Wahrscheinlichkeit ist, ein Teilchen zur Zeit t im Intervall dq an der Stelle q zu finden. Da das betrachtete Teilchen zu jedem Zeitpunkt irgendwo sein muss, gilt

$$\int dq \, |\psi(t,q)|^2 \; = \; 1 \, . \qquad (4)$$

Diese Bedingung entspricht der Normierung einer Wellenfunktion in der Quantenmechanik.

[1] Eine Funktion bezeichnet man als differenzierbar, wenn sie und ihre 1. Ableitung stetig sind.

(a) Beweisen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen irgendwo im Raum zu finden, von der Zeit unabhängig ist. **(3 Punkte)**

Anmerkung: Das hat zur Folge, dass man die Erzeugung oder Vernichtung von Teilchen im Rahmen der Quantenmechanik nicht beschreiben kann. Dazu sollte man die Quantenfeldtheorie verwenden.

(b) Die Wellenfunktion eines freien Teilchens mit der Masse m zur Zeit $t = 0$ sei $\psi_0(q) = (2\alpha/\pi)^{\frac{1}{4}} \exp(-\alpha q^2)$, wobei $\alpha > 0$ gilt. Zeigen Sie, dass diese Wellenfunktion zur Zeit $t > 0$ durch

$$\psi(t,q) \; = \; \frac{(2\alpha/\pi)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{1 + 2i\alpha\hbar t/m}} \exp\left(-\frac{\alpha q^2}{1 + 2i\alpha\hbar t/m}\right). \tag{5}$$

gegeben sein soll. Bleibt die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(t,q)|^2$ erhalten? Unter welcher Bedingung ist die Wahrscheinlichkeitsdichte im Allgemeinen von der Zeit unabhängig? **(3 Punkte)**