Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Physik
Karlsruher Institut für Technologie

Moderne Theoretische Physik I: Theorie D

Dozent: Prof. Dr. Frans R. Klinkhamer
Assistent: Dr. Viacheslav A. Emelyanov

- `Abgabe am Montag, den 28.05.2018; Besprechung am Mittwoch, den 30.05.2018`
- `Aktuelle Informationen zur Vorlesung befinden sich unter folgendem Link: https://www.itp.kit.edu/~slava/quantenmechanik_ss_18.html`
- `Melden Sie sich rechtzeitig für Vorleistung und Klausur im QISPOS bzw. CAMPUS an. Dies ist erforderlich und erfolgt unter https://campus.studium.kit.edu`

Name: ______________________ Übungsgruppe: ______ Punkte: ________

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1: Erwartungswerte und Unschärferelation (10 Punkte)

(a) Ein Teilchen befinde sich in einem Potential, das von der Form ist

$$U(q) \;=\; \begin{cases} 0\,, & \text{für } |q| \,>\, a\,, \\ -U_0\,, & \text{für } |q| \,<\, a\,, \end{cases} \tag{1}$$

wobei $U_0 > 0$. Die Energie des Teilchens beträgt $E < 0$. Finden Sie die Erwartungswerte von den Operatoren $\hat{q}^2$ und $\hat{p}^2$, indem Sie annehmen, dass das Potential untief ($U_0 \ll \hbar^2/ma^2$) ist. Überzeugen Sie sich danach davon, dass die Heisenbergsche Unschärferelation gilt. **(5 Punkte)**

Hinweis: Benutzen Sie Ihre Lösung zur Aufgabe 3.1, um zu zeigen, dass die Wellenfunktion des Teilchens gerade und reellwertig in dem untiefen Potential in erster Näherung ist. Zeigen Sie danach, dass die Mittelwerte von den Operatoren $\hat{q}$ und $\hat{p}$ in einem Zustand, der durch eine reellwertige und gerade Wellenfunktion beschrieben ist, im Allgemeinen verschwinden.

(b) Die Wellenfunktion eines Teilchens der Masse m sei

$$\psi(q) \;=\; \begin{cases} Aq^2\exp(-q/a)\,, & \text{für } q \,>\, 0\,, \\ 0\,, & \text{für } q \,\leq\, 0\,, \end{cases} \tag{2}$$

wobei A und a positive Konstanten sind. Schätzen Sie mit Hilfe der Heisenbergschen Unschärferelation die mittlere kinetische Energie $\langle\hat{T}\rangle$ des Teilchens ab. Vergleichen Sie danach

Stand 16.05. 2018 um 10:33:24

Ihres Ergebnis mit dem tatsächlichen Wert der kinetischen Energie. Bestimmen Sie das Potential $U(q)$ für $q > 0$ und die Energie E des Teilchens, wenn bekannt ist, dass $U(q) \to 0$ für $q \to +\infty$ gilt. **(5 Punkte)**

Aufgabe 6.2: Unitarität und Hermitizität (4 Punkte)

Einen Operator $\hat{U}$ bezeichnet man als unitär genau dann, wenn $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{1}$ gilt. Ein Operator $\hat{O}$ heißt hermitesch, wenn $\hat{O} = \hat{O}^\dagger$ zutrifft.

(a) Zeigen Sie, dass ein unitärer Operator einem hermiteschen Operator zugeordnet werden kann. **(1 Punkt)**

(b) Was für eine physikalische Forderung steckt dahinter, dass der Hamiltonoperator hermitesch sein muss? **(1 Punkt)**

(c) Nehmen Sie an, dass $\hat{H}$ von der Zeit unabhängig ist. Lösen Sie die Schrödinger-Gleichung mit der Anfangsbedingung $\psi(t,q)|_{t=t_0} = \psi_0(q)$. Zeigen Sie danach, dass die Wellenfunktion zur Zeit $t > t_0$ mit der Wellenfunktion zur Zeit t_0 durch einen unitären Operator[1] verknüpft ist. **(2 Punkte)**

Aufgabe 6.3: Die quantenmechanische Dispersion eines Wellenpakets (10 Punkte)

Die Wellenfunktion eines Teilchens der Masse m sei durch

$$\psi(t,q) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk\, a_k \exp(-i\omega t + ikq) \tag{3}$$

gegeben, wobei $\omega = \hbar k^2/2m$.

(a) In welchem Potential befindet sich das Teilchen? **(2 Punkte)**

(b) Wir nehmen weiter an, dass die Amplitude $a_k \propto \exp(-\alpha(k-k_0)^2)$ ist, worin α und k_0 positive Konstanten sind. Berechnen Sie die Erwartungswerte von den Operatoren $\hat{q}$ und $\hat{p}$. **(2 Punkte)**

(c) Berechnen Sie die Erwartungswerte von den Operatoren $\hat{q}^2$ und $\hat{p}^2$. Legen Sie danach die Unschärferelation im angegebenen Zustand als Funktion der Zeit fest. **(3 Punkte)**

(d) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(t,q)|^2$ als Funktion der Zeit t am vorgegebenen Ort. Interpretieren Sie die zeitliche Entwicklung von $|\psi(t,q)|^2$ physikalisch. **(3 Punkte)**

[1] Man bezeichnet ihn als Entwicklungsoperator $\hat{U}(t,t_0)$, sodass $\psi(t,q) = \hat{U}(t,t_0)\psi_0(q)$ gilt.