Institut für Theoretische Physik
Karlsruher Institut für Technologie

Moderne Theoretische Physik I: Theorie D

Dozent: Prof. Dr. Frans R. Klinkhamer
Assistent: Dr. Viacheslav A. Emelyanov

- `Abgabe am Montag, den 04.06.2018; Besprechung am Mittwoch, den 06.06.2018`
- `Aktuelle Informationen zur Vorlesung befinden sich unter folgendem Link: https://www.itp.kit.edu/~slava/quantenmechanik_ss_18.html`
- `Melden Sie sich rechtzeitig für Vorleistung und Klausur im QISPOS bzw. CAMPUS an. Dies ist erforderlich und erfolgt unter https://campus.studium.kit.edu`

Name: __________ Übungsgruppe: ______ Punkte: ______

Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1: Der harmonische Oszillator (12 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem quadratischen Potential, d.h. der Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$\hat{H} \;=\; \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{q}^2}{2}\,, \tag{1}$$

worin die Frequenz ω das Potential beschreibt.

(a) Die allgemeine Lösung der klassischen Hamilton-Gleichungen ist

$$q \;=\; \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \left(a e^{-i\omega t} + b e^{+i\omega t}\right), \tag{2}$$

worin a und b Konstanten der Integration sind. Aus welcher physikalischen Forderung folgt, dass $b = a^*$ sein muss? **(1 Punkt)**

(b) In der Quantenmechanik werden die Funktionen q und $p = m\dot{q}$ zu hermiteschen Operatoren $\hat{q}$ und $\hat{p}$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Da q und p durch a und a^* ausgedrückt werden können, werden a und a^* zu nicht-hermiteschen Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$. Zeigen Sie, dass $[\hat{a}, \hat{a}] = 0$, $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ und $[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0$ gelten. **(3 Punkte)**

Bemerkung: Die Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ bezeichnet man als Absteigeopertor bzw. Aufsteigeoperator in der Quantenmechanik. In der Quantenfeldtheorie sind solche Operatoren von großer physikalischer Bedeutung, weil diese dem Vernichtungsoperator bzw. Erzeugungsoperator eines Teilchens entsprechen.

Stand 24. 05. 2018 um 12:08:38

(c) Drücken Sie den Hamiltonoperator $\hat{H}$ durch die Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ aus. Bestimmen Sie danach den minimalen Wert der Energie des Teilchens in diesem Potential. **(2 Punkte)**

(d) Man bezeichnet den Zustand der minimalen Energie als $|0\rangle$. Beweisen Sie, dass $\hat{a}|0\rangle = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass $|1\rangle \equiv \hat{a}^\dagger|0\rangle$ ein Eigenzustand des Operators $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a}$ zum Eigenwert 1 ist. Zeigen Sie, dass $|0\rangle = \hat{a}|1\rangle$ gilt. Berechnen Sie die Energie des Teilchens im Zustand $|1\rangle$. Vergleichen Sie danach $E_1 = \langle 1|\hat{H}|1\rangle$ mit $E_0 = \langle 0|\hat{H}|0\rangle$. **(4 Punkte)**

(e) Zeigen Sie, dass der normierte und wie folgt definierte Zustand

$$|n\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

ein Eigenzustand des Operators $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ zum Eigenwert n ist. Zeigen Sie danach, das der Zustand $|n\rangle$ der Energie $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ entspricht. **(2 Punkte)**

Aufgabe 7.2: Vollständigkeit (6 Punkte)

Betrachten Sie den von den Funktionen $\{1, \sin x, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x, \cos 2x\}$ aufgespannten Vektorraum (der Definitionsbereich der Funktionen sei $[0, 2\pi]$).

(a) Bestimmen Sie die Dimension des Raumes. **(2 Punkte)**

(b) Geben Sie eine Basis an und zeigen Sie deren Vollständigkeit und lineare Unabhängigkeit. **(4 Punkte)**

Aufgabe 7.3: Die Schwarzsche Ungleichung (6 Punkte)

Die Schwarzsche Ungleichung lautet

$$|\langle\phi, \psi\rangle| \leq \sqrt{\langle\phi, \phi\rangle\langle\psi, \psi\rangle}\,, \tag{4}$$

wobei

$$\langle\phi, \psi\rangle \equiv \int d^N q\, \phi^*(q)\psi(q) \quad \text{und} \quad q \in \mathbb{R}^N\,. \tag{5}$$

(a) Beweisen Sie mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung die Dreiecksungleichung:

$$\left|\sqrt{\langle\psi, \psi\rangle} - \sqrt{\langle\phi, \phi\rangle}\right| \leq \sqrt{\langle\psi + \phi, \psi + \phi\rangle} \leq \sqrt{\langle\psi, \psi\rangle} + \sqrt{\langle\phi, \phi\rangle} \quad \textbf{(4 Punkte)} \tag{6}$$

Hinweis: Betrachten Sie zuerst jede Ungleichung separat. Da beide Seiten jeder Ungleichung nicht negativ sind, quadrieren Sie diese, um die Dreiecksungleichung zu beweisen.

(b) Betrachten wir nun einen Zustand mit der Wellenfunktion χ, in dem ein linearer Operator $\hat{O}$ die verschwindende Standardabweichung besitzt. Zeigen Sie, dass die Schwarzsche Ungleichung für Zustände χ und $\hat{O}\chi$ saturiert ist, d.h. die Schwarzsche Gleichung gilt. **(2 Punkte)**