Institut für Theoretische Physik
Karlsruher Institut für Technologie
Moderne Theoretische Physik I: Theorie D
Dozent: Prof. Dr. Frans R. Klinkhamer
Assistent: Dr. Viacheslav A. Emelyanov

- `Besprechung am Mittwoch, den 13.06.2018`
- `Aktuelle Informationen zur Vorlesung befinden sich unter folgendem Link: https://www.itp.kit.edu/~slava/quantenmechanik_ss_18.html`
- `Melden Sie sich rechtzeitig für Vorleistung und Klausur im QISPOS bzw. CAMPUS an. Dies ist erforderlich und erfolgt unter https://campus.studium.kit.edu`

Name: ______________________ Übungsgruppe: ______ Punkte: ________

Übungsblatt 8 – Probeklausur

Aufgabe 8.1: Fragebogen (8 Punkte)

Antworten Sie kurz auf die folgenden Fragen:

(a) Wodurch beschreibt man den Zustand eines Systems in der Wellenmechanik? **(1 Punkt)**

(b) Was entspricht einer Observable in der Wellenmechanik? **(1 Punkt)**

(c) Was ist die De-Broglie-Wellenlänge? **(1 Punkt)**

(d) Was versteht man unter dem Welle-Teilchen-Dualismus? **(1 Punkt)**

(e) Wie lauten die folgenden Kommutatoren: $[\hat{q}, \hat{q}]$, $[\hat{q}, \hat{p}]$ und $[\hat{p}, \hat{p}]$? **(1 Punkt)**

(f) Was versteht man unter der Heisenbergschen Unschärferelation? **(1 Punkt)**

(g) Wie lautet die allgemeine Schrödinger-Gleichung eines Teilchens? **(1 Punkt)**

(h) Was versteht man unter der stationären Schrödinger-Gleichung? Geben Sie sie an. **(1 Punkt)**

Aufgabe 8.2: Der harmonische Oszillator (8 Punkte)

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m im harmonischen Potential der Frequenz ω. Das Teilchen befinde sich in einem Zustand, der ist beschrieben durch

$$\psi_a(q) \;=\; \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\,q^2 + 2\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} aq - \frac{1}{4}\left(a + a^*\right)^2\right), \tag{1}$$

wobei a eine komplexe Konstante ist.

(a) Zeigen Sie, dass diese Wellenfunktion die Gleichung $\widehat{a}\,\psi_a(q) = a\,\psi_a(q)$ erfüllt. **(1 Punkt)**
Erinnerung: Der Absteigeoperator ist definiert durch

$$\widehat{a} \;\equiv\; \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\widehat{q} + \frac{i}{m\omega}\,\widehat{p}\right). \tag{2}$$

(b) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert des Operators $\widehat{N} \equiv \widehat{a}^\dagger\widehat{a}$ in diesem Zustand $|a|^2 \equiv a^*a$ beträgt. **(1 Punkt)**

(c) Zeigen Sie, dass die Heisenbergsche Unschärferelation im Zustand $\psi_a(q)$ saturiert ist, d.h., dass in diesem Zustand $\Delta q \Delta p = \hbar/2$ gilt. **(2 Punkte)**

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Zustand $\psi_n(q)$ zu finden? **(4 Punkte)**
Erinnerung: Die Wellenfunktion $\psi_n(q)$ ist Eigenfunktion des Operators $\widehat{N}$ zum Eigenwert n und lautet wie folgt:

$$\psi_n(q) \;=\; \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}(n!)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\,q^2\right) H_n\!\left(\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} q\right), \tag{3}$$

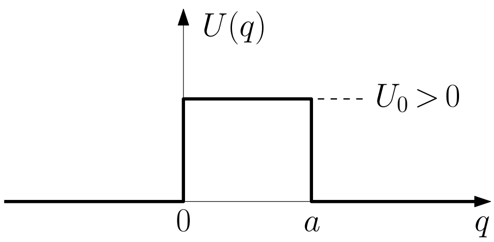
wobei $H_n(z)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ die Hermite-Polynome sind. Es gilt $H_0(z) = 1$, $H_1(z) = 2z$ usw.

Hinweis: Bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit machen Sie Gebrauch vom Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2}\, e^{\alpha x} H_0(x) H_n(x) \;=\; \pi^{\frac{1}{2}}\alpha^n \exp\left(+\frac{\alpha^2}{4}\right) \quad \textit{für} \quad \forall\,\alpha \,\in\, \mathbb{C}\,. \tag{4}$$

Aufgabe 8.3: Die Potentialbarriere (8 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem Potential, das in der Abbildung dargestellt ist.



Das Teilchen bewege sich von links nach rechts und seine Energie betrage $E > U_0$.

(a) Bestimmen Sie die physikalisch akzeptable Wellenfunktion des Teilchens in diesem Potential. **(3 Punkte)**

(b) Was für Bedingungen muss die Wellenfunktion des Teilchens an den Stellen $q = 0$ und $q = a$ erfüllen? **(1 Punkt)**

(c) Berechnen Sie die Reflexionskoeffizient R und Transmissionskoeffizient T. **(3 Punkte)**

(d) Unter welcher Bedingung strebt der Reflexionskoeffizient gegen 0? **(1 Punkt)**