Institut für Theoretische Physik
Karlsruher Institut für Technologie

Moderne Theoretische Physik I: Theorie D

Dozent: Prof. Dr. Frans R. Klinkhamer
Assistent: Dr. Viacheslav A. Emelyanov

- Abgabe am Montag, den 18.06.2018; Besprechung am Mittwoch, den 20.06.2018
- Aktuelle Informationen zur Vorlesung befinden sich unter folgendem Link: https://www.itp.kit.edu/~slava/quantenmechanik_ss_18.html
- Melden Sie sich rechtzeitig für Vorleistung und Klausur im QISPOS bzw. CAMPUS an. Dies ist erforderlich und erfolgt unter https://campus.studium.kit.edu

Name: ______________________ Übungsgruppe: ______ Punkte: ________

Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1: Die Messwahrscheinlichkeit (8 Punkte)

(a) Der lineare hermitesche Operator $\hat{A}$ habe abzählbar unendlich viele Eigenwerte $\{a_i\}$, wobei $i \in \mathbb{N}$, mit orthonormierten Eigenzuständen ψ_{a_i}. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden am System im Zustand $\psi = \psi_{a_1} + (i/2)\psi_{a_3}$ die Werte a_1, a_2 und a_3 gemessen? **(3 Punkte)**

(b) In Aufgabe 3.3.b haben wir die Wellenfunktion $\psi_0(q) \propto \exp(-\alpha q^2)$ eines freien Teilchens mit $\alpha > 0$ betrachtet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P_E den Energiewert E an diesem Teilchen zu messen? Bestimmen Sie auch, wie diese Wahrscheinlichkeit von der Zeit abhängt. Berechnen Sie dann die Wahrscheinlichkeit irgendeinen beliebigen Energiewert zwischen 0 und unendlich an diesem Teilchen zu messen. **(5 Punkte)**

Aufgabe 9.2: Der Drehimpulsoperator (8 Punkte)

(a) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\big[\widehat{l}_x, \widehat{l}_y\big] = i\hbar\,\widehat{l}_z$. Zeigen Sie diese Kommutatoralgebra benutzend, dass $\big[\widehat{l}_i, \widehat{l}_j\big] = i\hbar\,\epsilon_{ijk}\,\widehat{l}_k$ im allgemein gilt, wobei ϵ_{ijk} das Levi-Civita Symbol mit $\epsilon_{xyz} = +1$ ist. **(2 Punkte)**

(b) Zeigen Sie, dass $\big[\widehat{l}_i, \widehat{\mathbf{l}}^2\big] = 0$ gilt, wobei $\widehat{\mathbf{l}}^2 = (\widehat{l}_x)^2 + (\widehat{l}_y)^2 + (\widehat{l}_z)^2$ ist. **(2 Punkte)**

(c) Berechnen Sie die Kommutatoren $\big[\widehat{x}_i, \widehat{l}_j\big]$, $\big[\widehat{p}_i, \widehat{l}_j\big]$, $\big[\widehat{l}_i, \widehat{\mathbf{r}}^2\big]$ und $\big[\widehat{l}_i, \widehat{\mathbf{p}}^2\big]$. **(2 Punkte)**

(d) Zeigen Sie, dass ein Operator, der mit zwei Komponenten des Drehimpulses kommutiert, dann auch mit seiner dritten Komponente vertauschbar ist. **(2 Punkte)**

Aufgabe 9.3: Der gequetschte Zustand (8 Punkte)

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m im harmonischen Potential der Frequenz ω. Der Zustand des Teilchens ist durch die Wellenfunktion $\psi_b(q)$ beschrieben, die ist definiert durch die folgende Gleichung:

$$\widehat{a}\,\psi_b(q) \;=\; b\,\widehat{a}^\dagger\,\psi_b(q)\,, \tag{1}$$

wobei b eine reelle Konstante ist.

(a) Was für Werte darf die Konstante b einnehmen? **(2 Punkte)**

Hinweis: Beweisen Sie zuerst, dass $\langle\widehat{N}\rangle \equiv \langle\widehat{a}^\dagger\widehat{a}\rangle \geq 0$ in beliebigem Zustand gilt. Dieses Ergebnis benutzend, finden Sie den erlaubten Wertebereich des Parameters b.

(b) Zeigen Sie, dass die Unschärferelation in diesem Zustand saturiert ist. **(4 Punkte)**

Hinweis: Beweisen Sie, dass $b\langle\widehat{a}^\dagger\pm\widehat{a}\rangle = \pm(1+b^2)\langle\widehat{a}^\dagger\pm\widehat{a}\rangle$ und $(1-b^2)\langle(\widehat{a}^\dagger\pm\widehat{a})^2\rangle = 2b\pm(1+b^2)$ im gequetschten Zustand gelten. Drücken Sie dann die Operatoren $\widehat{q}$ und $\widehat{p}$ durch $\widehat{a}$ bzw. $\widehat{a}^\dagger$ aus, um die mittleren quadratischen Schwankungen Δq und Δp festzustellen.

(c) Zeigen Sie, dass die mittlere quadratische Schwankung Δq einen beliebigen Wert aus $[0, +\infty)$ im gequetschten Zustand einnehmen kann. **(1 Punkt)**

(d) Zeigen Sie, dass neue Operatoren $\widehat{b}$ und $\widehat{b}^\dagger$ mit $[\widehat{b}, \widehat{b}^\dagger] = 1$ existieren, so dass $\widehat{b}\,\psi_b(q) = 0$ gilt. **(1 Punkt)**